

Chapitre II

Physique des plasmas Magnétohydrodynamique

Résumé

L'Univers est composé de 99% de gaz ionisés appelés plasmas, tels que les étoiles, l'atmosphère terrestre ou les lampes à néon. Ces plasmas sont décrits à l'aide de paramètres physiques tels que la température, la densité, le libre parcours moyen ou la longueur de Debye. Les particules composant un plasma satisfont aux équations électromagnétiques de Maxwell et aux équations de conservation. Sous certaines hypothèses développées dans ce chapitre, les équations citées précédemment définissent la magnétohydrodynamique (MHD) permettant de décrire les évolutions temporelles et spatiales de la densité ou du champ magnétique. L'étude des états d'équilibre d'un plasma magnétisé se déduit des équations de la MHD en considérant les hypothèses du champ magnétique potentiel ou sans-force. Des ondes peuvent se propager dans les plasmas. Après une revue des modes d'oscillation existants dans un plasma d'électrons et d'ions, les ondes MHD sont analysées : onde d'Alfvén et ondes magnétoacoustiques lentes et rapides.

1 Description d'un plasma

Les plasmas dans l'Univers

Le terme "Plasma" désigne un gaz ionisé électriquement neutre. Les plasmas sont couramment définis comme le quatrième état de la matière (solides, liquides, gaz, plasmas par ordre croissant de température). Les plasmas constituent environ 99% de l'Univers. Les variations de température et de densité (Fig. II.1) mettent en évidence la multitude de plasmas existant dans l'Univers pour des températures comprises entre 100 et 10^8 K et de densités entre 100 et 10^{33} particules.m⁻³.

Les plasmas naturels (terrestres ou spatiaux) se retrouvent de façon disparate dans les nébuleuses, dans le nuage d'hydrogène composant le milieu interstellaire, dans les étoiles (du coeur de l'étoile siège de réactions de fusion nucléaires au vent stellaire en passant par l'atmosphère ténue), et dans l'environnement terrestre (ionosphère, magnétosphère, foudre).

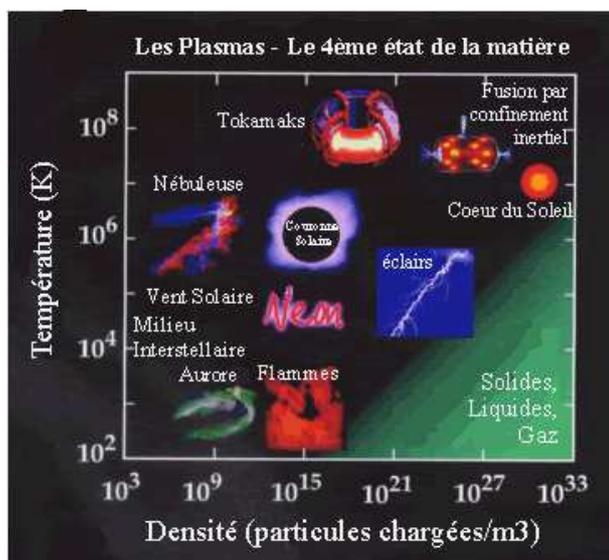


FIG. II.1 – Classement des plasmas spatiaux et terrestres en fonction de la densité et de la température

Depuis le début du XX^{ème} siècle, le développement de la physique des plasmas a permis la découverte de nombreuses applications technologiques. On citera les exemples des objets les plus courants tels les "lampes à néon" (tubes à décharge contenant un plasma de gaz rare ionisé), les télévisions à écran plasma, les composants électroniques nécessitant un traitement de la surface par un plasma pour la gravure et le dépôt de film, ou encore les radiocommunications grandes distances utilisant la réflexion d'une onde radiométrique sur l'ionosphère. Les plasmas sont aussi utilisés comme "combustibles" dans les moteurs ioniques : ces moteurs utilisent l'accélération des particules chargées d'un plasma magnétisé

plongées dans un champ électrique haute tension pour produire une poussée. Enfin, les plasmas sont au coeur des recherches sur la production d'énergie électrique par fusion thermonucléaire, soit par confinement magnétique (tokamak), soit par confinement inertiel. Les progrès réalisés dans ces domaines ces dernières années sont très prometteurs : le budget énergétique que fournissent ces réactions de fusion est théoriquement considérable par rapport aux méthodes de production actuelles.

Description cinétique

Pour décrire un plasma ou un gaz, on peut soit utiliser les méthodes de l'hydrodynamique en considérant des grandeurs macroscopiques telles que la densité ou la vitesse du fluide, soit tenir compte de la nature moléculaire du fluide à partir des fonctions de distribution des vitesses qui donnent une description microscopique classique du fluide. Dans cette partie, nous allons donner les relations existant entre les grandeurs macroscopiques et les fonctions de distribution.

Dans une description statistique, le nombre probable de particules dans un élément de volume à 6 dimensions (3 dimensions de position, 3 dimensions de vitesse ou de quantité de mouvement) est $f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{r} d\vec{v}$ où $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ s'appelle la fonction de distribution de cette population de particules. Une équation cinétique est une équation qui permet de déterminer la fonction de distribution en tenant compte des forces microscopiques dues aux collisions et des forces macroscopiques telles que les champs appliqués :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c \quad (\text{II.1})$$

où \vec{F} contient les forces macroscopiques ainsi que le champ électrique moyen dû aux particules donné de façon auto-consistante par l'équation de Poisson

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \int f_i(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v},$$

et éventuellement un champ magnétique \vec{B} donné par

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \sum_i q_i \int f_i(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{v} d\vec{v},$$

et le second membre rend compte des collisions entre particules.

Pour obtenir les grandeurs macroscopiques, on calcul les différents moments de la fonction de distribution :

- la densité de particules

$$n(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}; \quad (\text{II.2})$$

- la vitesse moyenne des particules

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \frac{\int \vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}}{\int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}} = \frac{1}{n(\vec{r}, t)} \int \vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}; \quad (\text{II.3})$$

– l'énergie cinétique moyenne

$$\overline{E_c} = \frac{1}{n} \int \frac{1}{2} m \vec{v}^2 d\vec{v} ; \quad (\text{II.4})$$

– le tenseur de pression cinétique

$$\overline{\overline{P}}(\vec{r}, t) = m \int (\vec{v} - \vec{u}) \otimes (\vec{v} - \vec{u}) f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad (\text{II.5})$$

où \otimes représente le produit tensoriel ;

– le flux d'énergie thermique

$$\overline{\overline{Q}}(\vec{r}, t) = m \int (\vec{v} - \vec{u}) \otimes (\vec{v} - \vec{u}) \otimes (\vec{v} - \vec{u}) f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} . \quad (\text{II.6})$$

À partir de l'équation II.1 de la fonction de distribution, on peut écrire les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie des grandeurs macroscopiques. Par conséquent, en théorie la détermination de la fonction de distribution permet de déduire toutes les grandeurs macroscopiques du fluide.

Les paramètres caractéristiques

Les plasmas sont constitués de populations d'électrons, d'ions et de neutres dont les interactions peuvent être décrites par les paramètres suivants :

- la température T : à chaque population de particules, on peut associer une fonction de distribution caractérisant la densité de probabilité de présence des particules dans un volume et dans l'espace des vitesses (cf. paragraphe précédent). La température est alors définie à partir d'un moment de la fonction de distribution suivant une équation d'état. Pour les plasmas composés de populations de neutres, d'ions et d'électrons, la température électronique ($T_e \sim 30\,000$ K pour une pression de 1 Torr et une densité de 10^{-9} g.cm $^{-3}$) est plus élevée que la température des ions ou des neutres ($T_i \sim T_n \sim 300$ K dans les mêmes conditions) ;
- les longueurs caractéristiques : *la libre parcours moyen* est la distance moyenne entre deux collisions ; *la longueur de Debye* est la distance critique d'interaction collective, c'est-à-dire la distance au-delà de laquelle l'ion considéré est totalement écranté par les électrons (le potentiel de Debye d'interaction avec un autre ion devient négligeable) ; *le rayon de giration* est le rayon caractéristique du mouvement hélicoïdal des particules (électrons ou ions) dans un champ magnétique ;
- les fréquences caractéristiques : *la fréquence de collision* est la fréquence moyenne entre deux collisions successives, on distingue les collisions électrons-ions (ω_{ei}), électrons-neutres (ω_{en}) et ions-neutres (ω_{in}). La température des électrons étant très supérieure à la température des ions et des neutres, on a généralement $\tau_{ei} \sim \tau_{en} < \tau_{in}$ où τ est la période associée à la fréquence ω ; *la fréquence plasma* est la fréquence d'oscillation d'un plasma soumis à une perturbation locale de la densité électronique ;
- les vitesses caractéristiques : *la vitesse du son* notée $c_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$; *la vitesse d'Alfvén* notée $v_A = \frac{B}{(\mu_0 \rho)^{1/2}}$;

- le β du plasma : pour un plasma magnétisé, le paramètre β représente le rapport de la pression cinétique p et de la pression magnétique $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Il indique si le plasma est dominé ou non par le champ magnétique. En particulier pour un $\beta \ll 1$, le champ magnétique prédomine sur la matière du plasma.

2 La magnétohydrodynamique (MHD)

Les plasmas que nous allons étudier sont régis par les équations électromagnétiques de Maxwell et les équations de continuité. Les hypothèses permettant de simplifier ces équations définissent la magnétohydrodynamique (MHD).

2.1 Équations de Maxwell

Les équations de Maxwell représentent les bases de l'électromagnétisme, c'est-à-dire que ces équations permettent de décrire les évolutions spatio-temporelles du champ électrique et du champ magnétique :

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.7})$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho_c}{\epsilon_0} \quad (\text{II.9})$$

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \quad (\text{II.10})$$

en tenant compte des relations constitutives $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ et $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$. Dans ces équations, \vec{B} est l'induction magnétique (couramment appelée le champ magnétique), \vec{E} le champ électrique, \vec{j} la densité de courant, ρ_c la densité de charge, μ_0 la perméabilité magnétique ($\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$), ϵ_0 la permittivité électrique ($\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$). μ_0 et ϵ_0 sont reliées par $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ où c est la vitesse de la lumière.

Soient l_0 , t_0 et $V_0 = l_0/t_0$, la longueur, le temps et la vitesse caractéristique du plasma. L'analyse dimensionnelle de l'équation (II.7) montre que

$$\frac{E}{l_0} \sim \frac{B}{t_0} \quad (\text{II.11})$$

Compte-tenu de cette dernière relation et du fait que $V_0 \ll c$, le second terme du membre de droite de l'équation (II.10) est négligeable devant le terme magnétique et devant la distribution de courant, c'est-à-dire :

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} \quad (\text{II.12})$$

La forme intégrale de l'équation (II.8) signifie que le vecteur champ magnétique est à flux conservatif : le flux de \vec{B} à travers une surface fermée se conserve (égalité entre le flux entrant et le flux sortant). L'équation (II.8) permet aussi d'écrire que

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad (\text{II.13})$$

où \vec{A} est le potentiel vecteur associé au champ magnétique.

2.2 Équations de conservation

Les mouvements d'un plasma de densité ρ sont gouvernés par des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement ou l'énergie. Ces relations sont déduites des différents moments de la fonction de distribution associée au plasma et considérée comme une distribution maxwellienne.

L'équation de continuité ou de conservation de la masse s'écrivant :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{II.14})$$

traduit le fait que la masse est distribuée continuellement dans le plasma.

Pour un plasma électriquement neutre soumis aux seules forces de pression, de Lorentz, de gravité et de viscosité, l'équation du mouvement (ou conservation de la quantité de mouvement) s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = -\text{grad}(p) + \vec{j} \wedge \vec{B} + \rho \vec{g} + \vec{F}_\nu \quad (\text{II.15})$$

où p représente le champ de pression cinétique, \vec{g} est le champ de gravité. La force de viscosité s'écrit $\vec{F}_\nu = \rho \nu (\Delta \vec{v} + \frac{1}{3} \text{grad}(\text{div}(\vec{v})))$ où ν est le coefficient de viscosité cinématique.

Suivant les mêmes hypothèses (en négligeant la viscosité), l'équation de conservation de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \text{div} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \vec{v} \right) = \vec{v} \cdot (-\text{grad}(p) + \rho \vec{g} + \vec{j} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.16})$$

et l'équation de conservation de l'énergie interne U est

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div}((U + p)\vec{v}) = \vec{v} \cdot \text{grad}(p) . \quad (\text{II.17})$$

Comme nous avons négligé ici la viscosité et les sources ou pertes de chaleur, nous nous situons dans l'hypothèse adiabatique qui nous permet de réécrire l'équation précédente sous la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (\text{II.18})$$

où γ est le coefficient adiabatique (rapport des chaleurs spécifiques c_p et c_v). L'équation de conservation de l'énergie totale est alors la somme des équations II.16 et II.18 : conservation de l'énergie cinétique et de l'énergie interne.

D'autre part, la densité de charge ρ_c dans un plasma se conserve :

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0. \quad (\text{II.19})$$

Dans le cas d'un plasma électriquement neutre, la conservation de la densité de charge se réduit à $\text{div}(\vec{j}) = 0$

2.3 Loi d'Ohm, MHD idéale

La loi d'Ohm pour un conducteur en mouvement dans un champ magnétique est donnée par :

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.20})$$

où σ est la conductivité électrique du plasma. De cette équation et des équations de Maxwell, nous en déduisons l'équation d'évolution du champ magnétique :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = r\vec{ot}(\vec{v} \wedge \vec{B}) + \eta \Delta \vec{B} \quad (\text{II.21})$$

avec $\eta = (\mu_0 \sigma)^{-1}$ le coefficient de diffusion magnétique, et où le premier terme du second membre est le terme de convection, et le second terme est un terme de diffusion. Pour caractériser l'importance relative des deux termes, on forme le nombre sans dimension appelé le nombre de Reynolds magnétique :

$$R_B = \frac{v l}{\eta} = \left[\frac{\text{convection}}{\text{diffusion}} \right] \quad (\text{II.22})$$

avec v la vitesse et l la longueur caractérisant l'écoulement. Pour $R_B \gg 1$ dans lequel la convection domine, on suppose généralement que la conductivité électrique σ devient infinie. La loi d'Ohm implique alors que :

$$\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0} . \quad (\text{II.23})$$

On se place alors dans le cadre de la MHD idéale. Les équations II.21 et II.23 ont pour conséquence le théorème du gel : les lignes de champ magnétique évoluent avec le plasma. Dans le cadre de la MHD idéale, il existe un certain nombre de paramètres se conservant tels que le moment magnétique orbital μ ou encore l'hélicité magnétique H_m . Cette dernière quantité donnée par :

$$H_m = \int_V \vec{A} \cdot \vec{B} dV \quad (\text{II.24})$$

rend compte des propriétés topologiques du champ magnétique (cf revue de Berger, 1999). Par contre, cette expression de l'hélicité est sensible à la condition de jauge imposée (condition de fermeture imposée au potentiel vecteur). Pour pallier cette condition, Berger & Field (1984) ont défini l'hélicité magnétique relative ΔH_m dans un volume Ω en faisant intervenir le champ potentiel \vec{B}_0 ($r\vec{ot}\vec{B}_0 = \vec{0}$) avec les mêmes conditions aux limites imposées au champ \vec{B} :

$$\Delta H_m = \int_{\Omega} (\vec{A} - \vec{A}_0) \cdot (\vec{B} + \vec{B}_0) dV + \int_{\partial\Omega} \chi(\vec{B} + \vec{B}_0) \cdot \vec{n} dS \quad (\text{II.25})$$

où \vec{A} (resp. \vec{A}_0) est le potentiel vecteur associé au champ magnétique \vec{B} (resp. \vec{B}_0), \vec{n} est la normale à la surface. χ s'exprime à partir de \vec{B} et de \vec{B}_0 (Berger & Field, 1984). On peut considérer deux cas particuliers :

- si le volume Ω est un demi-espace, l'intégrale de surface tend alors vers zéro ;

– si on impose que la composante normale du champ magnétique doit être nulle à la surface limitant le volume Ω , alors l'intégrale de surface est exactement égale à zéro. Ces deux cas conduisent à l'expression de l'hélicité magnétique relative suivante :

$$\Delta H_m = \int_{\Omega} (\vec{A} - \vec{A}_0) \cdot (\vec{B} + \vec{B}_0) dV \quad (\text{II.26})$$

2.4 Hypothèses de la MHD

Les équations fondamentales de la MHD que nous utiliserons par la suite sont constituées des équations de Maxwell et des équations de conservation que nous résumons ci-dessous :

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{B}) &= 0 \\ \text{rot}(\vec{B}) &= \mu_0 \vec{j} \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \text{rot}(\vec{v} \wedge \vec{B}) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} &= -\text{grad}(p) + \vec{j} \wedge \vec{B} + \rho \vec{g} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Pour écrire ces équations, les hypothèses suivantes ont été appliquées :

- le plasma est traité comme un unique fluide neutre ;
- le plasma est considéré comme un milieu continu, c'est-à-dire que les échelles de longueur caractérisant l'évolution des grandeurs considérées (pression, densité, ...) sont très grandes devant les échelles de longueur interne au plasma comme le rayon de giration ionique ;
- le plasma est en équilibre thermodynamique avec une fonction de distribution proche d'une Maxwellienne. Les temps caractéristiques d'évolution du plasma sont plus grands que les temps de collision, et les échelles de longueur sont plus grandes que le libre parcours moyen ;
- la viscosité est négligée. Les effets relativistes sont aussi négligés en supposant que les vitesses d'Alfvén, sonore et la vitesse de déplacement de la matière soient inférieures à la vitesse de la lumière.

3 Équilibre magnétostatique

La MHD considère l'évolution temporelle et spatiale des différentes quantités telles que la densité ou le champ magnétique. Il est aussi intéressant d'étudier les variations lentes de ces paramètres (variations temporelles négligeables), c'est-à-dire de considérer que le plasma est en équilibre. De l'équation II.15, il en résulte que

$$\vec{0} = -\text{grad}(p) + \vec{j} \wedge \vec{B} + \rho \vec{g} . \quad (\text{II.27})$$

C'est l'équation d'équilibre magnétohydrostatique entre le gradient de pression, la force de Lorentz et la force de gravité. De l'équation II.27, on peut en déduire plusieurs cas simplifiés. Dans le cas d'un plasma à faible β , l'équation II.27 se réduit à :

$$\vec{j} \wedge \vec{B} = \vec{0} \quad (\text{II.28})$$

ce qui implique que le vecteur densité de courant est colinéaire au vecteur champ magnétique. Le champ magnétique vérifiant cette équation est appelé un champ sans-force. Dans le cas où la densité de courant est nulle, le champ magnétique est appelé un champ sans courant ou potentiel.

3.1 Champ potentiel

Quand la densité de courant s'annule, l'équation II.12 devient $\text{rot}(\vec{B}) = \vec{0}$, et peut aussi s'écrire :

$$\Delta \vec{B} = \vec{0} . \quad (\text{II.29})$$

Le champ magnétique est donc potentiel, c'est-à-dire que l'on peut associer au vecteur champ magnétique un potentiel scalaire ψ tel que $\vec{B} = \text{grad}(\psi)$ et satisfaisant l'équation de Laplace

$$\Delta \psi = 0 . \quad (\text{II.30})$$

L'intérêt du champ potentiel pour la physique solaire est que la composante normale du champ magnétique permet d'obtenir une solution unique dans un volume fermé. Le champ magnétique potentiel dans ce volume contient la plus petite valeur d'énergie magnétique possible. Cela signifie qu'une configuration magnétique avec des courants électriques non nuls et avec les mêmes valeurs du champ magnétique au niveau de la surface contiendra plus d'énergie que le champ potentiel. Malheureusement, l'application du cas potentiel à la physique solaire est limitée puisque des courants électriques sont observés dans la plupart des structures magnétiques solaires.

3.2 Champ sans-force

Pour une densité de courant différente de zéro dans tout le volume contenant le plasma, l'équation II.28 signifie que le vecteur champ magnétique et le vecteur densité de courant sont parallèles. Par conséquent, l'équation II.12 s'écrit :

$$\text{rot}(\vec{B}) = \alpha(\vec{r})\vec{B} \quad (\text{II.31})$$

où α est une fonction de la position. En utilisant les équations II.31 et II.8, on en déduit que α doit être constant le long d'une ligne du champ :

$$\vec{B} \cdot \text{grad}(\alpha) = 0 . \quad (\text{II.32})$$

Le champ magnétique vérifiant les équations II.31 et II.32 est appelé champ sans-force. Si α a la même valeur pour chaque ligne de champ, alors nous obtenons le cas sans-force linéaire ou à α constant pour lequel l'équation II.31 devient

$$(\Delta + \alpha^2)\vec{B} = \vec{0} . \quad (\text{II.33})$$

Ce cas est intéressant car l'équation qui le gouverne possède des solutions relativement simples à trouver (ce qui n'est pas le cas pour l'équation II.28). Des solutions ont été mises en évidence en utilisant soit des transformées de Fourier (e.g. Nakagawa & Raadu, 1972), soit des fonctions de Green (e.g. Chiu & Hilton, 1977). Comme dans le cas potentiel, le calcul du champ sans-force à α constant nécessite la connaissance de la composante normale du champ magnétique au niveau de la surface ($z = 0$).

Malgré les difficultés à résoudre les équations du champ sans-force, on peut en déduire des relations intéressantes. En particulier, Molodensky (1969) a mis en évidence des propriétés intégrales du champ sans-force :

$$\begin{aligned} \int_S (B_z^2 - B_x^2 - B_y^2) dS &= 0, & \int_S B_x B_z dS &= 0, \\ \int_S B_y B_z dS &= 0, & \int_S (y B_x B_z - x B_y B_z) dS &= 0, \\ \int_S y (B_z^2 - B_x^2 - B_y^2) dS &= 0, & \int_S x (B_z^2 - B_x^2 - B_y^2) dS &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

où S représente la surface photosphérique. Ces relations impliquent que, pour l'énergie magnétique contenue dans un volume V et dont le champ magnétique au niveau de la surface S est connue, on a la relation (Aly, 1989) :

$$\int_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \int_S (x B_x + y B_y) \frac{B_z}{\mu_0} dx dy . \quad (\text{II.35})$$

L'hélicité magnétique (Sect. 2.3) possède aussi des caractéristiques particulières dans le cas d'un champ sans-force. Woltjer (1958) a démontré que, pour un plasma parfaitement conducteur, l'hélicité magnétique dans un volume fermé V_0 est invariante et que l'état de minimum d'énergie correspond à un champ sans-force linéaire. Taylor (1974) a étendu les travaux de Woltjer : pour un plasma parfaitement conducteur, l'hélicité magnétique est invariante pour chaque tube de flux, et le minimum d'énergie est obtenu pour un champ sans-force linéaire. Taylor a aussi suggéré que, pour un plasma avec une faible résistivité, les modifications dans la topologie de la configuration magnétique étaient accompagnées par de faibles changements du champ magnétique, mais que globalement l'hélicité magnétique dans le volume total était inchangée. Par conséquent, l'hélicité est approximativement invariante et, d'après Woltjer (1958), le minimum d'énergie est obtenu pour le champ sans-force linéaire : c'est l'hypothèse de Taylor.

4 Les ondes MHD

Ondes dans les plasmas

Des ondes se propagent dans les plasmas. L'analyse et la classification des ondes dans les plasmas sont complexes de par la nature même du plasma : un plasma contient au moins deux populations (électrons et ions) de masses très différentes et par conséquent l'une ou l'autre ou les deux populations participent à l'onde. D'autre part, les plasmas sont souvent soumis à un champ magnétique qui leur confère des propriétés anisotropes.

Ondes	Plasma	Nature	Relation de dispersion	Dénomination
$\delta\vec{B} = \vec{0}$	$\vec{B}_0 = \vec{0}$ ou $\vec{B}_0 // \vec{k}$	électronique	$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{2}k^2 v_{th}^2$	Oscillation plasma
	$\vec{B}_0 \perp \vec{k}$	électronique	$\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 = \omega_h^2$	Oscillation hybride supérieure
	$\vec{B}_0 = \vec{0}$ ou $\vec{B}_0 // \vec{k}$	ionique	$\omega^2 = k^2 v_s^2$	Onde acoustique
	$\vec{B}_0 \perp \vec{k}$	ionique	$\omega^2 = \Omega_c^2 + k^2 v_s^2$	Onde ionique cyclotronique
			$\omega^2 = \Omega_c \omega_c$	Onde hybride inférieure
$\delta\vec{B}, \delta\vec{E} \neq \vec{0}$	$\vec{B}_0 = \vec{0}$	électronique	$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2$	Onde lumineuse
	$\vec{B}_0 \perp \vec{k},$ $\vec{B}_0 // \delta\vec{E}$	électronique	$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$	Onde ordinaire
	$\vec{B}_0 \perp \vec{k},$ $\vec{B}_0 \perp \delta\vec{E}$	électronique	$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2}$	Onde extraordinaire
	$\vec{B}_0 // \vec{k}$	électronique	$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}$	Onde R (siffleur)
			$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)}$	Onde L
	$\vec{B}_0 = \vec{0}$	ionique	pas d'onde possible	
	$\vec{B}_0 // \vec{k}$	ionique	$\omega^2 = k^2 v_A^2$	Onde d'Alfvén
	$\vec{B}_0 \perp \vec{k}$	ionique	$\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \frac{v_s^2 + v_A^2}{c^2 + v_A^2}$	Onde magnétosonique

TAB. II.1 – Modes oscillatoires de base dans un plasma. v_{th} est la vitesse thermique, ω_p la fréquence plasma, ω_c la fréquence cyclotronique électronique, v_s la vitesse du son, Ω_c la fréquence cyclotronique ionique, c la vitesse de la lumière et v_A la vitesse d'Alfvén (cf. texte).

Dans cette partie, nous allons préciser les types d'ondes planes pouvant se propager dans des plasmas isotropes. Les ondes se caractérisent par des perturbations en déplacement, en vitesse ou en champ magnétique des quantités globales (e. g. champ magnétique ou champ électrique extérieur). La méthode généralement utilisée pour déterminer les types d'ondes existant consiste à linéariser les équations fluides ou bi-fluides ou de la MHD (Éqs. de la Section 2.4) et ainsi d'obtenir l'opérateur des petits mouvements (cf Annexe V.A). Cette méthode s'applique aux ondes linéaires telles que nous les étudions ici.

Considérons un plasma composé d'électrons (T_e, n_e) et d'ions (T_i, n_i) soumis à un champ magnétique \vec{B}_0 et à un champ électrique \vec{E}_0 . L'onde plane a une pulsation ω ¹, un vecteur d'onde \vec{k} , un champ magnétique $\delta\vec{B}$ et un champ électrique $\delta\vec{E}$. L'ensemble des ondes pouvant exister dans un plasma est résumé dans le tableau II.1. La nature de l'onde

¹ Par abus de langage, on utilisera indifféremment pulsation ou fréquence

est associée aux mouvements des particules :

- électronique : seuls les électrons sont en mouvement (ondes hautes fréquences) ;
- ionique : les électrons et les ions sont en mouvement (ondes basses fréquences). Les électrons sont non inertiels car ils trouvent immédiatement leur régime d'équilibre. Les ions sont inertiels (pas d'accélération).

Pour chaque onde, on obtient une relation entre la fréquence (périodicité temporelle) et le vecteur d'onde (périodicité spatiale), appelée relation de dispersion. Les relations de dispersion font intervenir des vitesses caractéristiques telles que la vitesse de la lumière c , la vitesse du son $v_s = \frac{\gamma_e k_B T_e + k_B T_i}{M}$, la vitesse thermique électronique $v_{th} = \frac{k_B T_e}{m_e}$, la vitesse d'Alfvén $v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0(m_i n_i + m_e n_e)}}$, ainsi que les fréquences caractéristiques suivantes : la fréquence plasma $\omega_p^2 = \frac{n_e q^2}{m_e \epsilon_0}$, la fréquence cyclotronique électronique ($\omega_c = \frac{q}{m_e} B_0$) et ionique ($\Omega_c = \frac{q}{m_i} B_0$).

Les ondes listées précédemment représentent un ensemble restreint des ondes pouvant exister dans un plasma. Par exemple, il existe des ondes gravitiques faisant intervenir la gravité, des ondes inertielles associées à la force de Coriolis. On peut aussi étudier une grande variété de phénomènes associés à l'existence des ondes comme la stabilité (Rayleigh-Taylor, "kink", "sausage"), l'amortissement (e.g. amortissement Landau), ou les effets non linéaires des ondes.

Ondes MHD

Nous allons maintenant restreindre l'étude des ondes aux ondes électromagnétiques se propageant dans un plasma homogène infini soumis à un champ magnétique \vec{B}_0 avec une pression cinétique p_0 , une densité ρ_0 et sans gravité. Dans un tel plasma, trois types d'ondes existent : l'onde d'Alfvén, les ondes magnétoacoustiques lentes et rapides. Ces ondes sont appelées les ondes MHD. Les vitesses caractéristiques de ces ondes sont la vitesse d'Alfvén et la vitesse du son.

Le mode d'Alfvén est dû aux forces de tension (vitesse d'Alfvén) et n'est pas associé à des perturbations de pression ou de densité. Les perturbations de vitesse ou de champ magnétique sont transverses à \vec{B}_0 et au vecteur d'onde \vec{k} . Dans le cas d'un champ magnétique incliné par rapport au vecteur d'onde, les mouvements des ondes d'Alfvén sont perpendiculaires au plan défini par \vec{B}_0 et \vec{k} . Par contre, ce mode ne se propage pas si \vec{B}_0 et \vec{k} sont perpendiculaires.

Les modes magnétoacoustiques lent et rapide sont associés à des perturbations de tension (vitesse d'Alfvén) et de pression (vitesse du son). Le mode lent ne se propage pas lorsque \vec{B}_0 et \vec{k} sont perpendiculaires.

Un développement plus général des ondes MHD est nécessaire pour satisfaire aux conditions solaires. En particulier, il est important de tenir compte des variations de densité et de champ magnétique (plasma non homogène et non isotrope), des ondes existant aux interfaces entre deux plasmas distincts, ou de la gravité. Malheureusement la complexité de ces problèmes oblige à se restreindre à des cas plus simples.

Pour le développement de ce chapitre, nous nous sommes reportés aux ouvrages suivants :

- "Nonlinear Magnetohydrodynamics", Biskamp, D., 1993, Cambridge Monographs on Plasma Physics, Cambridge [England]; New York, NY : Cambridge University Press
- "Physique des plasmas", Delcroix, J.L., Bers, A., 1994, InterÉditions/CNRS Éditions, Paris
- "Solar Magneto-hydrodynamics", Priest, E. R., 1984, Geophysics and Astrophysics Monographs, Dordrecht : Reidel
- "Transport and Energy Conversion in the Heliosphere", 2000, eds. Rozelot, J.P., Klein, L., Vial, J.C., Berlin : Springer